

OPTIMIZAREA PORTOFOLIULUI DE ACTIVE CU AJUTORUL MODELULUI MARKOWITZ

Prof.univ.dr. **Dan ARMEANU**
E-mail: darmeanu@yahoo.com
Academia de Studii Economice
București

Doctorand **Andreea NEGRU**
Academia de Studii Economice
București

Abstract:

Se poate argumenta – cu oarecare temei – faptul că finanștii conștientizaseră de mai mult timp că decizia de a investi trebuie să ia în calcul, concomitent, rentabilitatea și riscul activelor, însă acest lucru se realiza mai mult la nivel empiric. Marea contribuție a profesorului H. Markowitz a reprezentat-o faptul că el a fost primul care a propus un model concret de optimizare a selecției activelor pentru portofoliile de investiții în condiții de incertitudine. Mai precis, Markowitz a arătat cum pot fi constituite portofoliile eficiente (acele portofolii care maximizează rentabilitatea sperată pentru un anumit nivel dat al riscului), compuse numai din active riscante. Simplitatea și eleganța rezultatului său, precum și gradul ridicat de aplicabilitate practică, au făcut ca modelul să devină extrem de popular, un veritabil punct de referință în finanțele moderne. De altfel, H. Markowitz a fost laureatul Premiului Nobel pentru economie în anul 1990, alături de M. Miller și W. Sharpe.

Cuvinte cheie: Portofoliul eficient, rentabilitate, risc, volatilitate, optim, varianta

Clasificare JEL: G11

In cadrul acestui articol vom pune in evidenta utilizarea practica a modelelor de risc și de gestiune a portofoliului , aplicația urmând a fi realizată asupra unei populații de 15 acțiuni¹ listate pe piețele bursiere din Germania (BMW – BMW, Commerzbank – CMB, Daimler – DAI, METRO – MET, Siemens – SIE), Polonia (CEZ – CEZ, Global Trade Center – GTC, Lotos Group – LTS, PKO Bank Polski – PKO, TVN – TVN) și România (BRD – BRD, Oltchim – OLT, Rompetrol – RRC, SIF 5 – SIF5, Turbomecanica – TBM), pentru care am analizat evoluția zilnică a cursurilor bursiere în perioada 01.01.2009 – 01.05.2011.

¹Pentru ca modelele prezentate să producă rezultate fiabile, se recomandă utilizarea unui număr maxim de 14 – 15 active.

Vom începe prin prezentarea modelului Markowitz de selecție a activelor realizând o analiza în cadrul planului rentabilitate așteptată – risc asumat, în contextul în care investitorii nu urmăresc plasarea capitalului lor în active fără risc (portofoliile investitorilor sunt constituite doar din active riscante). Vom utiliza tehnica simulării pentru a genera un număr mare de valori posibile ale cuplului randament – risc pentru portofolii alcătuite din titlurile considerate, construind astfel frontiera eficientă Markowitz. Precizăm că vom analiza situația în care piața permite vânzările pe descoperit (short sell).

Mai întâi ne propunem să demonstrăm modalitatea în care modelul Markowitz de optimizare a portofoliului poate fi utilizat pentru selecția de active și management-ul de portofoliu în condițiile piețelor de capital integrate.

Rentabilitățile medii zilnice, precum și volatilitățile medii pentru perioada considerată pentru cele 15 titluri sunt prezentate în tabelul următor:

Acțiune	Rentab. zilnică	Volat. zilnică
BMW	0.2475%	2.4665%
CMB	0.1697%	3.4304%
DAI	0.1940%	2.6182%
MET	0.1696%	2.0703%
SIE	0.1643%	2.0801%
CEZ	0.0217%	1.8025%
GTC	0.0905%	2.5091%
LTS	0.2620%	2.6726%
PKO	0.0978%	2.4725%
TVN	0.0996%	2.7610%
BRD	0.1326%	2.8527%
OLT	0.1873%	4.1731%
RRC	0.2242%	3.1411%
SIF5	0.2088%	3.4181%
TBM	0.1154%	3.9104%

Tabelul 1. Rentabilitățile și volatilitățile medii zilnice

(aferente perioadei 01.01.2009 – 01.05.2011) pentru cele 15 acțiuni considerate în analiză

Sursa: calcule proprii.

Matricea de covarianță și matricea de corelație pentru cele 15 active considerate sunt prezentate în continuare:

Ω	BMW	CMB	DAI	MET	SIE	CEZ	GTC	LTS	PKO	TVN	BRD	OLT	RRC	SIF5	TBM
BMW	0.0006 08	0.0003 69	0.000 521	0.000 228	0.000 157	(0.00 0005)	(0.00 0027)	0.000 044	0.000 037	0.000 070	0.000 051	(0.00 0025)	(0.00 0056)	0.0000 12	(0.00 0076)
CMB	0.0003 69	0.0011 77	0.000 436	0.000 266	0.000 152	(0.00 0029)	(0.00 0077)	(0.00 0086)	(0.00 0038)	0.000 004	0.000 020	0.000 082	0.000 056	0.0000 23	(0.00 0029)
DAI	0.0005 21	0.0004 36	0.000 685	0.000 262	0.000 181	(0.00 0008)	(0.00 0048)	0.000 038	0.000 039	0.000 065	0.000 089	0.000 068	(0.00 0032)	0.0000 39	(0.00 0009)
MET	0.0002 28	0.0002 66	0.000 262	0.000 429	0.000 120	(0.00 0001)	(0.00 0016)	0.000 007	0.000 023	0.000 026	0.000 022	0.000 009	(0.00 0020)	0.0000 29	(0.00 0021)
SIE	0.0001 57	0.0001 52	0.000 181	0.000 120	0.000 433	0.000 004	(0.00 0012)	0.000 008	0.000 024	0.000 034	(0.00 0032)	0.000 008	(0.00 0016)	(0.000 014)	0.000 004
CEZ	(0.00 005)	(0.00 029)	(0.00 0008)	(0.00 0001)	0.000 004	0.000 325	0.000 131	0.000 103	0.000 077	0.000 115	0.000 038	(0.00 0001)	0.000 021	0.000 65	0.000 016
GTC	(0.00 027)	(0.00 077)	(0.00 0048)	(0.00 0016)	(0.00 0012)	0.000 131	0.000 630	0.000 308	0.000 274	0.000 359	(0.00 0023)	0.000 059	0.000 034	0.0000 59	0.000 050
LTS	0.0000 44	(0.000 086)	0.000 038	0.000 007	0.000 008	0.000 103	0.000 308	0.000 714	0.000 344	0.000 362	0.000 057	0.000 116	0.000 016	0.0001 38	(0.00 0032)
PKO	0.0000 37	(0.000 038)	0.000 039	0.000 023	0.000 024	0.000 077	0.000 274	0.000 344	0.000 611	0.000 341	0.000 047	0.000 069	(0.00 0029)	0.0000 92	(0.00 0006)
TVN	0.0000 70	0.0000 04	0.000 065	0.000 026	0.000 034	0.000 115	0.000 359	0.000 362	0.000 341	0.000 762	(0.00 0015)	0.000 083	0.000 055	0.0000 76	(0.00 0015)
BRD	0.0000 51	0.0000 20	0.000 089	0.000 022	(0.00 0032)	0.000 038	(0.00 0023)	0.000 057	0.000 047	(0.00 0015)	0.000 814	0.000 099	(0.00 0038)	0.0002 75	0.000 098
OLT	(0.000 025)	0.0000 82	0.000 068	0.000 009	0.000 008	(0.00 0001)	0.000 059	0.000 116	0.000 069	0.000 083	0.000 099	0.001 741	0.000 080	0.0000 84	(0.00 0040)
RRC	(0.000 056)	0.0000 56	(0.00 0032)	(0.00 0020)	(0.00 0016)	0.000 021	0.000 034	0.000 016	(0.00 0029)	0.000 055	(0.00 0038)	0.000 080	0.000 987	(0.000 050)	(0.00 0019)
SIF5	0.0000 12	0.0000 23	0.000 039	0.000 029	(0.00 0014)	0.000 065	0.000 059	0.000 138	0.000 092	0.000 076	0.000 275	0.000 084	(0.00 0050)	0.0011 68	0.000 047
TBM	(0.000 076)	(0.000 029)	(0.00 0009)	(0.00 0021)	0.000 004	0.000 016	0.000 050	(0.00 0032)	(0.00 0006)	(0.00 0015)	0.000 098	(0.00 0040)	(0.00 0019)	0.0000 47	0.001 529

Tabelul 2. Matricea de covarianță (Ω) dintre randamentele activelor considerate

Sursa: calcule proprii.

Elementele de pe diagonala principală a matricei Ω reprezintă chiar varianțele zilnice ale rentabilităților titlurilor de valoare considerate în analiza noastră. În continuare vom calcula coeficienții de corelație acestia fiind prezentați în tabelul următor:

	BMW	CMB	DAI	MET	SIE	CEZ	GTC	LTS	PKO	TVN	BRD	OLT	RRC	SIF5	TBM
BMW	1.0000	0.4356	0.8073	0.447 2	0.305 1	(0.01 15)	(0.04 31)	0.067 4	0.061 3	0.103 4	0.072 9	(0.02 43)	(0.072 7)	0.014 3	(0.07 86)
CMB	0.4356	1.0000	0.4857	0.374 5	0.213 7	(0.04 68)	(0.08 93)	(0.09 41)	(0.04 52)	0.004 7	0.020 2	0.057 5	0.0521	0.019 7	(0.02 14)
DAI	0.8073	0.4857	1.0000	0.483 9	0.332 1	(0.01 67)	(0.07 28)	0.053 7	0.059 7	0.090 4	0.119 2	0.062 6	(0.038 6)	0.043 5	(0.00 92)
MET	0.4472	0.3745	0.4839	1.000 0	0.277 9	(0.00 18)	(0.03 11)	0.012 3	0.045 2	0.045 2	0.038 1	0.010 4	(0.030 6)	0.040 9	(0.02 53)
SIE	0.3051	0.2137	0.3321	0.277 9	1.000 0	0.010 1	(0.02 31)	0.013 6	0.046 1	0.059 3	(0.05 40)	0.009 0	(0.024 5)	(0.02 01)	0.005 0
CEZ	(0.01 5)	(0.0468)	(0.016 7)	(0.00 18)	0.010 1	1.000 0	0.289 9	0.213 1	0.172 7	0.232 0	0.073 2	(0.00 16)	0.0363	0.106 3	0.022 6
GTC	(0.043 1)	(0.0893)	(0.072 8)	(0.03 11)	(0.02 31)	0.289 9	1.000 0	0.458 7	0.441 3	0.517 9	(0.03 16)	0.056 6	0.0426	0.068 7	0.051 1
LTS	0.0674	(0.0941)	0.0537	0.012 3	0.013 6	0.213 1	0.458 7	1.000 0	0.520 2	0.491 0	0.075 4	0.103 9	0.0193	0.151 0	(0.03 03)
PKO	0.0613	(0.0452)	0.0597	0.045 2	0.046 1	0.172 7	0.441 3	0.520 2	1.000 0	0.499 4	0.067 0	0.067 0	(0.037 1)	0.108 3	(0.00 65)
TVN	0.1034	0.0047	0.0904	0.045 2	0.059 3	0.232 0	0.517 9	0.491 0	0.499 4	1.000 0	(0.01 87)	0.071 7	0.0630	0.080 8	(0.01 42)

BRD	0.0729	0.0202	0.1192	0.0381	(0.0540)	0.0732	(0.0316)	0.0754	0.0670	(0.0187)	1.0000	0.0832	(0.0420)	0.2824	0.0879
OLT	(0.0243)	0.0575	0.0626	0.0104	0.0090	(0.0016)	0.0566	0.1039	0.0670	0.0717	0.0832	1.0000	0.0607	0.0588	(0.0245)
RRC	(0.0727)	0.0521	(0.0386)	(0.0306)	(0.0245)	0.0363	0.0426	0.0193	(0.0371)	0.0630	(0.0420)	0.0607	1.0000	(0.0466)	(0.0157)
SIF5	0.0143	0.0197	0.0435	0.0409	(0.0201)	0.1063	0.0687	0.1510	0.1083	0.0808	0.2824	0.0588	(0.0466)	1.0000	0.0352
TBM	(0.0786)	(0.0214)	(0.0092)	(0.0253)	0.0050	0.0226	0.0511	(0.0303)	(0.0065)	(0.0142)	0.0879	(0.0245)	(0.0157)	0.0352	1.0000

Tabelul 3. Matricea de corelație dintre randamentele activelor considerate

Sursa: calcule proprii.

După cum se poate observa, corelațiile dintre rentabilitățile așteptate zilnice ale acțiunilor studiate sunt relativ slabe, singurele corelații puternice (de peste 0.7) fiind întâlnite între acțiunile gigantilor germani din industria auto BMW și Daimler (ceea ce este justificabil, având în vedere sectorul în care cele două companii operează). Faptul că rentabilitățile titlurilor nu sunt corelate puternic înseamnă că beneficiile generate de diversificarea portofoliului vor fi însemnate, reducând considerabil riscul portofoliilor gestionate de investitori.

Vom proceda acum la determinarea frontierei eficiente Markowitz în ipoteza în care vânzările pe descoperit sunt autorizate pe piață. Pentru început, ne propunem să determinăm coordonatele portofoliilor fundamentale R (portofoliul de varianță minimă absolută) și U (caracterizat de randament maxim dacă piața nu permite vânzările pe descoperit), aplicând în acest sens relațiile de calcul

$$\left\{ \begin{array}{l} R_R = \frac{B}{A} \\ \sigma_R = \sqrt{\frac{1}{A}} \\ x_R = \frac{1}{A} \Omega^{-1} U \end{array} \right. \text{ și } \left\{ \begin{array}{l} R_U = \frac{C}{B} \\ \sigma_U = \frac{\sqrt{C}}{B} \\ x_U = \frac{1}{B} \Omega^{-1} R \end{array} \right. . \text{ Coordonatele (speranța de rentabilitate și}$$

volatilitatea) celor două portofolii vor fi:

$$\begin{aligned} E(R_R) &= 0.1399\% \\ \sigma_R &= 0.9422\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(R_U) &= 0.2314\% \\ \sigma_U &= 1.2119\%, \end{aligned}$$

iar vectorii de structură vor fi dați de:

Acțiune	x_R	x_U
BMW	11.45%	32.93%
CMB	2.02%	0.81%
DAI	-7.02%	-18.90%
MET	13.25%	14.15%
SIE	15.55%	17.43%

CEZ	20.61%	-4.63%
GTC	6.07%	2.04%
LTS	1.99%	23.79%
PKO	6.31%	-3.11%
TVN	-0.89%	-6.90%
BRD	7.97%	5.79%
OLT	3.84%	5.32%
RRC	9.68%	16.48%
SIF5	3.43%	8.21%
TBM	5.75%	6.58%

Tabelul 4. Vectorii de structură ai portofoliilor fundamentale R și U

Sursa: calcule proprii.

Pentru a determina frontiera eficientă Markowitz vom simula acum mai multe valori posibile ale cuplului rentabilitate-risc, utilizând formula de calcul

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\frac{1}{D} (AR^{*2} - 2BR^* + C)}$$

Rezultatele simulării efectuate sunt prezentate în tabelul ce urmează.

E(R_p)	σ_p
0.0000%	1.4980%
0.0100%	1.4343%
0.0200%	1.3726%
0.0300%	1.3133%
0.0400%	1.2567%
0.0500%	1.2032%
0.0600%	1.1533%
0.0700%	1.1074%
0.0800%	1.0660%
0.0900%	1.0297%
0.1000%	0.9990%
0.1100%	0.9745%
0.1200%	0.9566%
0.1300%	0.9458%
0.1400%	0.9422%
0.1500%	0.9459%
0.1600%	0.9569%
0.1700%	0.9749%

0.1800%	0.9996%
0.1900%	1.0304%
0.2000%	1.0668%
0.2100%	1.1083%
0.2200%	1.1543%
0.2300%	1.2044%
0.2400%	1.2579%
0.2500%	1.3145%
0.2600%	1.3739%
0.2700%	1.4356%
0.2800%	1.4994%
0.2900%	1.5651%
0.3000%	1.6323%
0.3100%	1.7010%
0.3200%	1.7709%
0.3300%	1.8419%

Tabelul 5. Valori posibile ale cuplului rentabilitate sperată – risc asumat în condițiile în care piața autorizează vânzările pe descoperit
Sursa: calcule proprii.

Graficul următor ilustrează frontiera eficientă Markowitz (ramura superioară sau a portofoliilor dominante):

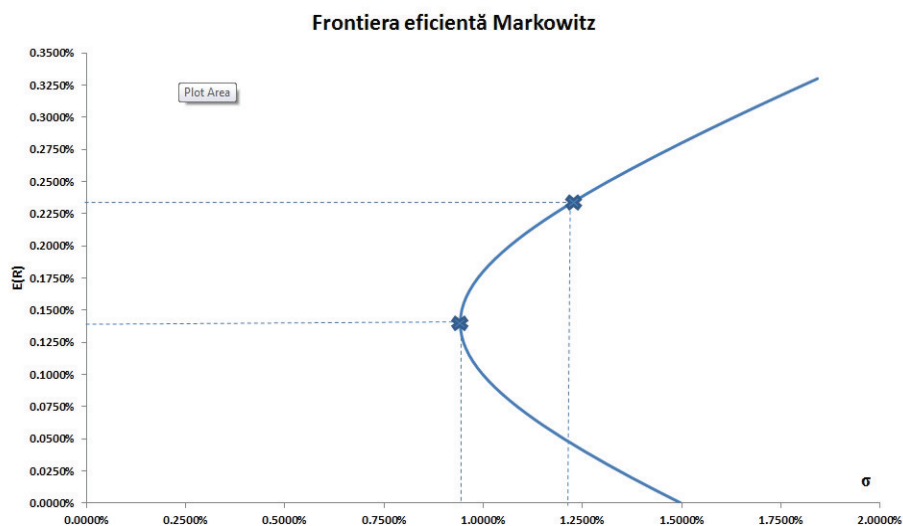


Figura 1. Frontiera eficientă Markowitz atunci când pe piață sunt permise vânzările pe descoperit

Sursa: calcule proprii.

Ramura inferioară a hiperbolei (a portofoliilor dominate) cuprinde portofoliile realizabile, dar indezirabile, în condițiile în care portofoliile de pe frontiera Markowitz asigură, la același nivel al riscului asumat, o rentabilitate net superioară.

Astfel folosind modelul Markowitz, al cărui scenariu ne plasează într-o piață pe care nu cotează active fără risc, orizontul portofoliilor constituite de investitori limitându-se la cele 15 acțiuni considerate, am dedus frontiera Markowitz (mulțimea portofoliilor eficiente). Aceasta reprezintă locul geometric al portofoliilor caracterizate de volatilitate minimală la un anumit nivel – dat – al rentabilității așteptate. Ipoteza de la care am plecat constă în faptul că pe piață sunt autorizate vânzările pe descoperit, ceea ce înseamnă că toate cele 15 acțiuni au putut fi folosite pentru constituirea de portofolii eficiente. În acest caz am evidențiat portofoliile de risc minim absolut pe care investitorii le pot constitui și am reprezentat grafic frontiera eficientă Markowitz în planul risc asumat – rentabilitate așteptată.

BIBLIOGRAFIE

1. Beste, A.; Leventhal, D.; Williams, J.; Qin Lu – **The Markowitz Model. Selecting an Efficient Investment Portfolio**, Lafayette College, Mathematics REU Program, 2002;
2. Benninga, Simon – **Financial modelling**, 3rd edition, MIT Press, 2008;
3. Bodie, Zvi; Kane, Alex; Marcus, Alan – **Essentials of investments**, The McGraw-Hill Companies, 2003;
4. Damodaran, Aswath – **Estimating risk parameters** (2008), <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/>
5. Fama, E.F.; K.R. French, **The Cross-Section of Expected Stocks Returns**, *Journal of Finance*, 67 (2), 1992, pp. 427–465;
6. Friedlob, G.; Schleifer, L. – **Essentials of financial analysis**, Wiley, 2003;
7. Hitchner, James – **Financial valuation: applications and models**, Wiley, 2006;
8. Meucci, A.- **Risk and Asset Allocation**, Springer, 2005;
9. Ross, Stephen; Westerfield, Randolph; Jordan, Bradford – **Fundamentals of corporate finance**, 8th edition, McGraw-Hill/Irwin, 2007;
10. Rubinstein, Mark – **A history of the theory of investments**, Wiley, 2006;
11. Sharpe, W. – “*Portfolio Theory and Capital Markets*”, McGraw – Hill, 1970;
12. Fama, E. – “*Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices*”, Basic Books, 1976;
13. Markowitz, H. – “*Portfolio Selection*”, Yale University Press, 1959;
14. Beste, A.; Leventhal, D.; Williams, J.; Qin Lu – “*The Markowitz Model. Selecting an Efficient Investment Portfolio*”, Lafayette College, Mathematics REU Program, 2002;
15. Fama, E. – “*Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*”, *Journal of Finance*, Nr. 25, 1970